北京邮电大学
2018 年硕士研究生入学考试试题
考试科目:概率论

请考生注意：①所有答案（包括选择题和填空题）一律写在答题纸上，否则不计成绩。

②不允许使用计算器。

一、填空题（每小题 5 分，共 50 分）

1、设 A,B,C 是随机事件， A 与 C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{3}$, 则 $P(AB|\overline{C})=$____.

2. 设随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 则 X,Y 均大于0的概率为____.

3. 设正态分布随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$， $Y\sim N(1,1)$。定义随机变量 $Z=2X+Y-1$, 则 Z 的概率密度函数 $f_Z(z)=$____.

4. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若随机事件 $\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则 a,b 各等于 ____.

5. 设$\varphi(x)$为标准正态分布的概率密度函数，$g(x)$为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度函数，若$f(x)=\begin{cases} a\varphi(x), & x\le 0, \\ bg(x), & x>0 \end{cases}$为一概率密度函数，其中$a>0,b>0$，则$a$, b应满足____.

6. 从数$1,2,3,4$中任取一个数，记为X, 再从$1,2,\cdots,X$中任取一个数，记为Y, 则$P\{Y=2\}=$____.

7. 设随机变量X的特征函数为$\phi(t)=\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$, 则$E(X^4)=$____.

8. 设随机变量X在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上服从均匀分布，则随机变量$Y=\tan X$的概率密度函数$f(y)=$____.

9. 设随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} cx, & 0<x<1,0<y<x, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中c为待定系数，则概率$P\{X+Y<1\}=$____.

10. 设随机变量X,Y独立同分布，均服从正态分布$N(\mu,\sigma^2),\sigma>0$，令$Y=X+Y,Z=X-Y$，则Y,Z的相关系数$\rho_{Y,Z}=$____.

二. （20 分）设随机变量$X_1,X_2,\ldots,X_n$独立同分布，且概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} \lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases} \quad \lambda>0,$$

令 $X=\min\{X_i, i=1,2,\ldots,n\}$。

求（1） X 的概率密度函数；

（2）概率 $P\{X=X_1\}$。

三.（20 分）设 (X,Y) 是二维随机变量， X 的边缘概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

在给定 $X=x\in(0,1)$ 的条件下，随机变量 Y 的条件概率密度函数为

$$f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求（1） Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$；

（2）在给定 $Y=y$ 的条件下，随机变量 X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\,|\,y)$。

四.（20 分）设连续型随机变量 X,Y 独立，概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}(\ln 2)2^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}(\ln 4)4^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

令 $U=X+2Y, V=X$。

求（1） (U,V) 的概率密度函数，

（2） U,V 的边缘概率密度函数，

（3）问 U,V 是否相互独立。

五. （20 分）设一天到某超市购物的顾客数是一非负整值随机变量 N，假设第 i 个顾客的消费金额为非负随机变量 $X_i, i=1,2,\dots$。若随机变量序列 $\{X_i, i=1,2,\dots\}$ 独立同分布，并与随机变量 N 独立，且 $E(X_1)=\mu$，$D(X_1)=\sigma_X^2$，$E(N)=n_0$，$D(N)=\sigma_N^2$。求这一天该超市销售额的均值和方差。

（提示：对于随机变量 X,Y，如果 $\phi(y)=E(X\mid Y=y)$，$\varphi(y)=E(X^2\mid Y=y)$，则 $E(X\mid Y)=\phi(Y)$，$E(X^2\mid Y)=\varphi(Y)$）

六. （20 分）设随机变量序列 $\{X_n, n=1,2,\dots\}$ 独立同分布，具有概率密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & x\in(0,4),\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

（1）证明 $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k > 3\right\}=0$；

（2）利用中心极限定理估计概率 $P\left\{\sum\limits_{k=1}^{12} X_k > 20\right\}$.

（$\Phi(0.5)=0.6915$，$\Phi(1)=0.8413$）